Algèbre 2

Partiel du 16/11/2017 – Corrigé

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 2h

Exercice 1.
(1) Quelles sont les composantes primaires du groupe $\mathbb{U}_{90}$?
(2) Donner la décomposition cyclique du groupe $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$.

Corrigé : On a $\mathbb{U}_{90} = 90 = 2 \times 3^2 \times 5$. *Les composantes primaires de* $\mathbb{U}_{90}$ *sont donc d'ordre* 2, 3^2 *et* 5 *respectivement. Il sont uniques de ces ordres là. Donc par unicité ce sont les sous-groupes* $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_9$ *et* $\mathbb{U}_5$ *et on a* $\mathbb{U}_{90} = \mathbb{U}_{90} \times \mathbb{U}_9 \times \mathbb{U}_5$.

Exercice 2.
Soit G un groupe fini d'ordre 21 agissant sur un ensemble E.
(1) Quels sont les cardinaux possibles des orbites pour cette action?
(2) Pour $i \in \mathbb{N}$ on note n_i le nombre d'orbites à i éléments. Donner une relation entre $\mathrm{card}(E)$ et les n_i.
(3) On suppose que $\mathrm{card}(E) = 11$. Montrer qu'il y a au moins un point fixe pour l'action de G sur E.
(4) On suppose que $\mathrm{card}(E) = 19$ et qu'il n'y a pas de point fixe pour l'action de G sur E. Calculer le nombre d'orbites dans E sous l'action de G.

Corrigé. (1) Le cardinal de chaque orbite divise $\mathrm{card}(E)$. *Les cardinaux possibles de des orbites sont donc : 1, 3, 7 et 2.*
(2) D'après l'équation des classes on a

$$\mathrm{card}(E) = n_1 + 3n_3 + 7n_7 + 21n_{21}$$

(3) Si $\mathrm{card}(E) = 11$, *alors il n'y a pas d'orbite de cardinal 21, et on a*

$$11 = n_1 + 3n_3 + 7n_7$$

d'où $n_1 = 1$, $n_3 = 1$ *et* $n_7 = 1$ *est une possibilité. Les autres possibilités correspondent à* $n_7 = 0$ *et dans tous les cas il y a au moins une orbite à un point , c-à-d. un élément fixe.*
(3) Si $\mathrm{card}(E) = 19$ *et il n'y a pas de point fixe, donc* $n_1 = 0$. *On a aussi* $n_{21} = 0$, *d'où*

$$19 = 3n_3 + 7n_7$$

et la seule possibilité est $n_3 = 4$ *et* $n_7 = 1$. *Il y a donc quatre orbites à 3 points et une orbite à 7 points.*

Exercice 3.
Soit Q_8 le groupe des matrices 2×2 inversibles engendré par $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.
Le groupe Q_8 est appelé *groupe des quaternions.*
(1) Déterminer tous les éléments de Q_8. Quel est alors son ordre? Ce groupe est-il commutatif?
(2) Montrer que Q_8 n'a qu'un élément d'ordre 2.
(3) Déterminer tous les sous-groupes de Q_8.
(4) Montrer que tous les sous-groupes de Q_8 sont distingués.
(5) Montrer que Q_8 ne peut s'obtenir comme produit semi-direct de deux de ses sous-groupes propres.

Corrigé. (1) Pose $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{k} = \mathbf{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On note aussi* $\mathbf{1} = I_2$. *On vérifie assez facilement que :*
$\mathbf{1}$ *est l'élément neutre de* Q_8*;*
$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$*;*
$(-\mathbf{1})\mathbf{i} = -\mathbf{i}$, $(-\mathbf{1})\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, $(-\mathbf{1})\mathbf{k} = -\mathbf{ik}$*;*
$\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$*;*
$\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{kj} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{ik} = -\mathbf{j}$.
Ainsi

$$Q_8 = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$$

(2) Le groupe Q_8 *admet un seul élément d'ordre 2 qui est* $\{-\mathbf{1}\}$.
(3) Le groupe Q_8 *admet un seul sous-groupe d'ordre 2 qui est* $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$ *(le centre de* Q_8*).*
Les autres sous-groupes sont d'ordre 4 qui sont

$$\langle\mathbf{i}\rangle = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}\}, \langle\mathbf{j}\rangle = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{j}\}, \text{ et } \langle\mathbf{k}\rangle = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{k}\}$$

(4) A part les sous-groupes triviaux (qui sont bien évidemment distingués) :
Le sous-groupe d'ordre 2 est le centre de Q_8*, il est donc distingué.*
Les sous-groupes d'ordre 4 sont d'indice 2 dans Q_8*, il sont donc distingués.*
(5) Aucun des trois sous-groupes d'ordre 4 ne peut être un facteur semi-direct de Q_8 *car l'autre facteur serait d'ordre 2 et serait d'intersection réduite à* $\{\mathbf{1}\}$ *avec le facteur d'ordre 4. Mais tous ces sous-groupes d'ordre 4 contiennent le seul sous-groupe d'ordre 2. En conclusion* Q_8 *ne peut s'obtenir comme produit semi-direct de deux de ses sous-groupes propres.*

Exercice 4.
Soit G un groupe fini, $Z(G)$ son centre. On fait agir G sur lui même par conjugaison

$$G \times G \ni (g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1} \in G$$

(1) On suppose que G non commutatif. Soit $x \in G$ tel que $x \notin Z(G)$ et soit $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ le stabilisateur de x. Montrer que $Z(G) \subset G_x \subset G$, où les inclusions sont strictes.
(2) En déduire que si G n'est pas commutatif, $Z(G)$ est un sous-groupe de G dont l'indice est strictement supérieur au plus petit nombre premier divisant $|G|$, l'ordre

de G.
(3) Soit p un nombre premier et n un entier. Déduire de la question précédente les valeurs possibles de l'ordre du centre d'un groupe d'ordre p^n? (On rappelle que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à $\{e\}$).
(4) Quel est le centre d'un groupe d'ordre p^2?
(5) Quel est le centre d'un groupe non commutatif d'ordre p^3?
(6) Donner un exemple de groupe non commutatif d'ordre p^3.
(7) Montrer que si G est d'ordre p^2, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Corrigé. (1) On a $Z(G) \subset G_x\ \forall x \in G$.
Supposons G non commutatif ($Z(G) \neq G$). *Donc il existe au moins un élément* $x \in G$ *tel que* $x \notin Z(G)$. *Comme* $xxx^{-1} = x$, *on a* $x \in G_x$. *Par conséquent* $Z(G) \subsetneq G_x$.
De plus puisque $x \notin Z(G)$, *il existe un élément* $g \in G$ *qui ne commute pas à* x, *donc* $g \notin G_x$. *D'où* $G_x \subsetneq G$.
(2) Supposons G non commutatif et soit p le plus petit nombre premier divisant $|G|$. *D'après la question précédente* $|Z(G)| < |G_x|$, *donc* $[G : Z(G)] > [G : G_x]$ *et comme* $[G : G_x]$ *divise* $|G|$, *donc* $[G : G_x] \geq p$. *Ainsi* $[G : Z(G)] > p$.
(3) Si G est commutatif, l'ordre de $|Z(G)| = p^n$.
Si G n'est pas commutatif, alors d'après la question précédente $[G : Z(G)] > p$, *donc* $|Z(G)| = \frac{|G|}{[G:Z(G)]} < p^{n-1}$. *Par ailleurs* $Z(G) \neq \{e\}$, *donc* $|Z(G)| \in \{p, p^2, \cdots, p^{n-1}\}$.
(4) Si G est d'ordre p^2, *alors G est nécessairement commutatif et* $|Z(G)| = p^2$.
(5) Si G est un groupe non commutatif d'ordre p^3*., alors d'après ce qui précède,* $|Z(G)| = p$.
(6) Le groupe des quaternions Q_3 *(voir Exercice 2) est un groupe d'ordre* 2^3 *non commutatif.*
(7) Soit G un groupe d'ordre p^2. *Il est donc commutatif.*
– *Si G contient un élément d'ordre* p^2, *alors il est cyclique et isomorphe à* $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
– *Si G ne contient pas d'élément d'ordre* p^2, *alors tous les éléments, sauf le neutre e, sont d'ordre p.*
Soient $x, y \in G$ *tels que* $y \notin \langle x \rangle$. *On montre que*
$\langle x \rangle$ *et* $\langle y \rangle$ *sont deux sous-groupes distingués de G;*
$\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$;
$\langle x \rangle\langle y \rangle$ *est un sous-groupe d'ordre* p^2 *donc égal à G.*
Donc G est isomorphe à $\langle x \rangle \times \langle y \rangle \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.